Cayley oktoniók és a G_2 Lie csoport

Gyenge Ádám[1]

[1]Magyar Tudományos Akadémia
Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet

2015. október 15.

Az előadás felépítése:

1. Emlékeztető a Lie-csoportokról és Lie-algebrákról
2. Cayley-Dickson konstrukció
3. A G_2 konstrukciója a Cayley algebra automorfizmuscsoportjaként
4. A G_2 mint S^6 feletti $SU(3)$ nyaláb
5. A G_2 mint egy $\mathbb{R}^7$-beli 3-forma izotrópiacsoportja

Lie csoportok

Definíció

A G sima sokaság egy *Lie csoport*, ha el van látva egy $m\colon G \times G \to G$ szorzás és $i\colon G \to G$ inverz művelettel, amik simák és velük G csoport:

$$m(g,h) = gh, \qquad i(g) = g^{-1}.$$

- Lie csoportok = folytonos szimmetriák leírásának eszközei
- Rengeteg alkalmazásban fontosak: elméleti fizika, részecskefizika, robotika, számítógépes grafika, stb.
- Érdemes minél többet megtudni a topológiájukról (is)
- Interdiszciplináris terület a matematikán belül: differenciálgeometria, algebrai topológia, algebra, stb.

Lie algebrák

Definíció

Egy $\mathfrak{g}$ valós vektortér *Lie algebra*, ha el van látva egy $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, $(X, Y) \mapsto [X, Y]$ leképezéssel, amire

1. Bilineáris: $[aV + bW, X] = a[V, X] + b[W, X]$,
2. Antiszimmetrikus $[V, W] = -[W, V]$,
3. Jacobi azonosság: $[V, [W, X]] + [W, [X, V]] + [X[V, W]] = 0$.

Egy G Lie csoport összes balinvariáns vektormezője a Lie zárójellel a *Lie csoport Lie algebrája*.

Osztályozás

Tétel (Lie-Cartan)

Egyszeresen összefüggő Lie csoportok $\leftrightarrow$ Véges dimenziós Lie algebrák.

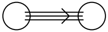
Tétel (Chevalley-Serre)

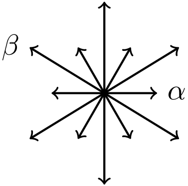
Komplex féligegyszerű Lie algebrák $\leftrightarrow$ Redukált gyökrendszerek.

A redukált irreducibilis gyökrendszerek Dynkin diagramjai a következők lehetnek:

1. $\mathrm{A_n}(n \geq 1)$
2. $\mathrm{B_n}(n \geq 2)$
3. $\mathrm{C_n}(n \geq 3)$
4. $\mathrm{D_n}(n \geq 4)$
5. $\mathrm{E_6}, \mathrm{E_7}, \mathrm{E_8}, \mathrm{F_4}, \mathrm{G_2}$ (kivételes Lie algebrák és Lie csoportok)

A G2 gyökrendszer

Különösen érdekes a G_2 Lie csoport (a legkisebb dimenziós kivételes).
Dynkin diagramja: 
Gyökrendszere:



A $W\alpha$ és $W\beta$ Weyl-csoport orbitok is A_2 gyökrendszert alkotnak.

Cayley-Dickson konstrukció

Legyen $\mathcal{A}$ egy nem feltétlenül asszociatív, de véges dimenziós algebra $\mathbb{R}$ felett, ellátva egy $a \mapsto \bar{a}$ lin. leképezéssel, amire $\bar{\bar{a}} = a$ és $\overline{ab} = \bar{b}\bar{a}$ teljesülnek (*konjugálás*).

Definíció

Az $\mathcal{A}$ algebra *duplázása* $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A} \oplus \mathcal{A}$ ahol a szorzás definíciója

$$(a, b)(u, v) = (au - \bar{v}b, b\bar{u} + va) \ .$$

$\mathcal{A}^2$-ben a konjugálás:

$$\overline{(a, b)} = (\bar{a}, -b) \ .$$

Így az eljárás iterálható: $\mathbb{R} \to \mathbb{C} \to \mathbb{H} \to \mathbb{O} \to \dots$

Normált algebrák

Definíció

1. *Metrikus algebra:* $a\bar{a} \in \mathbb{R}^+ = 1 \cdot \mathbb{R}^+ \Rightarrow |a| := \sqrt{a\bar{a}}$.
2. *Normált algebra:* $|ab| = |a||b|$.
3. *Divizióalgebra:* $ax = b$ és $xa = b$ minden $a, b \neq 0$-ra megoldható.

Ha $\mathcal{A}$ metrikus $\Rightarrow$ $\mathcal{A}^2$ is metrikus.
Ha $\mathcal{A}$ normált, akkor $a^{-1} = \frac{\bar{a}}{|a|^2} \Rightarrow \mathcal{A}$ divizió.

Osztályozás

Tétel (Hurwitz)

Az $\mathbb{R}$-feletti, véges dimenziós, nullosztómentes normált algebrák a következők: $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$, $\mathbb{O}$.

$\mathbb{H}$ nem kommutatív, de asszociatív.

$\mathbb{O}$ nem asszociatív $\Rightarrow$ nem test.

Viszont $\mathbb{O}$ *alternatív*: $\xi(\xi\eta) = (\xi\xi)\eta$, $(\eta\xi)\xi = \eta(\xi\xi)$.

Tétel (Frobenius)

Az $\mathbb{R}$-feletti, véges dimenziós ferdetestek a következők: $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$.

Automorfizmuscsoport

- Egy algebra automorfizmuscsoportja, $\operatorname{Aut}\mathcal{A}$ Lie csoport, amire (ha $\mathcal{A}$ normált)

$$\operatorname{Aut}\mathcal{A} \subseteq O(n-1)$$

- $\operatorname{Aut}\mathcal{A}$ Lie algebrája, $\operatorname{Der}\mathcal{A}$ az algebra összes derivációja, amire

$$\operatorname{Der}\mathcal{A} \subseteq \mathrm{so}(n-1)$$

Pl. $\operatorname{Aut}\mathbb{C} = O(1) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
Pl. $\operatorname{Aut}\mathbb{H} = SO(3), \operatorname{Der}\mathbb{H} = \mathrm{so}(3)$.
Ez geometrialiag úgy látható, hogy i, j és k a $\mathbb{H}' = \{v \in \mathbb{H} : \xi \perp 1\}$ altér bármely pozitív irányítású ortonormált bázisba mehet.

Tekintsük a következő leképezést:

$$p\colon \begin{array}{ccc} \operatorname{Aut}\mathbb{H} & \to & S^2 \\ \varphi & \mapsto & \varphi(i) \end{array}.$$

Mátrixosan:

$$p\colon \begin{array}{ccc} SO(3) & \to & S^2 \\ [v_1|v_2|v_3] & \mapsto & v_1 \end{array}.$$

Egy $v_1 \in S^2$ vektor feletti fibrum:

$$p^{-1}(v) = \{[v_1|v_2|v_3] \ : \ v_2 \perp v_1, v_3 = v_1 \times v_2, |v_2|^2 = |v_3|^2 = 1\}.$$

Ez pont $SO(2)$ egy eleme.

$\Rightarrow p\colon SO(3) \xrightarrow{SO(2)} S^2$ fibrálás, amivel $SO(3)/SO(2) \approx S^2$.

Principális nyalábok

Legyeng G kompakt Lie-csoport.

Definíció

A $\pi\colon P \to M$ lok. triviális fibrálás *principális G-nyaláb*, ha

- G hat P-n,
- a hatás fibrumot fibrumba visz,
- a hatása a fibrumokon szabad és tranzitív.

A $\pi_1\colon P_1 \to M$ és $\pi_2\colon P_2 \to M$ principális G-nyalábok közötti morfizmus egy $P_1 \to P_2$ G-ekvivariáns leképezés.

Mindig igaz:

- a fibrumok G-vel diffeomorfak (de ált. nincs egységszelés),
- orbit tér: $P/G \approx M$,
- minden morfizmus izomorfizmus.

Principális nyalábok osztályozása

Milnor konstrukció: a köv. nyaláb univerzális

$$E_G = \lim_{n\to\infty} \underbrace{G * \cdots * G}_{n}, \quad B_G = E_G/G$$

Állítás

$\{\textit{Principális } G\textit{-nyalábok } M \textit{ fölött}\}/\sim \;\leftrightarrow [M, B_G]$

$\{\text{Principális } G\text{-nyalábok } S^n \text{ fölött}\}/\sim \;\leftrightarrow [S^n, B_G] = \pi_n(B_G)$.

Továbbá: $\underbrace{\pi_n(E_G)}_{0} \longrightarrow \pi_n(B_G) \xrightarrow{\simeq} \pi_{n-1}(G) \longrightarrow \underbrace{\pi_{n-1}(E_G)}_{0}$.

$SO(3)$, mint nyaláb

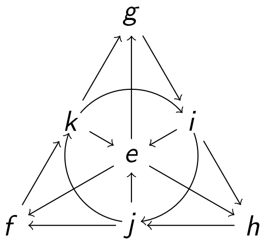
Következmény

Principális $SO(2)$-nyalábok S^2 fölött
$\leftrightarrow \pi_1(SO(2)) = 2\pi_1(U) = 2\pi_1(S^1) = 2\mathbb{Z} \approx \mathbb{Z}$.

Kérdés: Az $SO(3)$ melyik?
$S^2 \setminus \{S\}$ és $S^2 \setminus \{N\}$ felett a nyaláb triviális
$S^2 \setminus \{S, N\}$ felett ragasztóleképezés
A ragasztóleképezés az egyenlítő mentén körbemenve pont 2x "tekeredik"
$\Rightarrow$ az egyik generátorelem $2\mathbb{Z}$-ben.

Az oktonióalgebra

Láttuk: $\mathbb{O}$ nem asszociatív, viszont *alternatív*: $\xi(\xi\eta) = (\xi\xi)\eta$, $(\eta\xi)\xi = \eta(\xi\xi)$ Továbbá *divízió algebra*, azaz $ax = b$ és $xa = b$ minden nemnulla $a, b \in \mathcal{A}$ esetén egyértelműen megoldható.
Tehát $\mathbb{O}$ egy $\mathbb{R}$ feletti 8 dimenziós divizióalgebra. Bázis: $1, i, j, k, e, f, g, h$.
Szorzás: $e_i^2 = -1$ és



$\mathbb{O}$ esetén $dim\,\mathrm{Der}\,\mathbb{O} = 14$, viszont $dim\,\mathrm{so}(7) = 21 \Rightarrow$ ez egy új Lie algebra.
$\mathrm{Aut}\,\mathbb{O}$ egyszeresen összefüggő

Tétel

$$\mathrm{Der}\,\mathbb{O} = \mathfrak{g}_2, \quad \mathrm{Aut}\,\mathbb{O} = G_2 \ .$$

Jelölés:

- $\mathbb{O}' = \{\xi \in \mathbb{O} : \xi \perp 1\}$ a képzetes oktoniók halmaza,
- $S^6 = \{\xi \in \mathbb{O}' : ||\xi|| = 1\} = \{\xi \in \mathbb{O} : \xi^2 = -1\}$.

Egy fontos tétel

Az i, j, e báziselemekre bármely $\varphi \in G_2$-vel:

- $\varphi(i), \varphi(j), \varphi(e) \in S^6$
- $\varphi(j) \perp \varphi(i)$
- $\varphi(e) \perp \varphi(i), \varphi(j), \varphi(i)\varphi(j) = \varphi(k)$

Ezen állítás visszafelé is igaz:

Tétel

Minden $\xi, \eta, \zeta \in S^6$ hármashoz, amire teljesül hogy

- $\eta \perp \xi$,
- $\zeta \perp \xi, \eta, \xi\eta$, *létezik egyértelműen egy* $\varphi \in G_2$, *hogy*

$$\xi = \varphi(i), \qquad \eta = \varphi(j), \qquad \zeta = \varphi(e) .$$

G_2 mint $SU(3)$-nyaláb I.

Tehát: G_2 elemei $\leftrightarrow$ megfelelő $(\xi, \eta, \zeta) \in S^6$ hármasok.
Tekintsük a

$$\begin{array}{rccc} p: & G_2 & \to & S^6 \\ & (\xi, \eta, \zeta) & \mapsto & \xi \end{array}$$

leképezést, azaz a kiértékelést az első vektorra. Ez tranzitív S^6-on (i-t bárhova el tudja vinni).
Az N északi pólus izotrópiacsoportja (stabilizátora) $\simeq SU(3)$

Következmény

$G_2/SU(3) \approx S^6$ és a

$$p : G_2 \to S^6$$

leképezés egy principális $SU(3)$-nyaláb.

Volt: principális $SU(3)$-nyalábok S^6 fölött $\leftrightarrow \pi_5(SU(3)) = \mathbb{Z}$.
Kérdés: A G_2 melyik? Válasz ismét: Az egyik generátorelem.

1 Tekintsük a nyalábot $S^6 \setminus \{S\}$ illetve $S^6 \setminus \{N\}$ felett. Ezek triviális nyalábok, így léteznek

$$\psi_1 \colon p^{-1}(S^6 \setminus \{S\}) \to S^6 \setminus \{S\} \times SU(3), \quad \varphi \mapsto (\varphi(i), \theta_{\varphi(i)}(\varphi))$$

$$\psi_2 \colon p^{-1}(S^2 \setminus \{N\}) \to S^2 \setminus \{N\} \times SU(3), \quad \varphi \mapsto (\varphi(i), \tilde{\theta}_{\varphi(i)}(\varphi)) \,.$$

trivializáló leképezések.

A majdnem komplex sokaság struktúra S^6-on

2 Legyen $T_\xi = \{\eta \in \mathbb{O}' : \eta \perp \xi\}$ a ξ-beli érintőtere $S^6 - nak$.
Ekkor $J_\xi : T_\xi \to T_\xi, v \mapsto \xi v$ egy komplex struktúra T_ξ-n ($J_\xi^2 = -Id$).
Így T_ξ-n definiálható a komplex skalárral való szorzás:

$$(x + Iy)v = xv + yJ_\xi(v) \ .$$

Definíció

Egy *majdnem komplex sokaság* egy M valós sokaság ellátva egy $J : TM \to TM$ sima nyalábleképezéssel amire:

1. $J(T_m M) = T_m M$ minden $m \in M$,
2. $J^2 = -1$.

Köv: S^6 egy majdnem komplex sokaság J_ξ-vel.
Ha megadunk egy komplex bázist, akkor az ad egy $V_\xi \approx \mathbb{C}^3$ azonosítást.
Azaz a trivializáló leképezések kifejezéséhez szükséges minden ξ-hez egy megfelelő bázis V_ξ-ben.

G_2 mint $SU(3)$-nyaláb

3 $S^6 \setminus \{S\}$-en az N-beli j, e, g komplex ortonormált bázist "forgatjuk be".
$S^6 \setminus \{N\}$-en az S-beli j, e, g komplex ortonormált bázist "forgatjuk be".

4 Ezután az áttérési függvény a két trivializáló környezet között:

$$\psi_1 \circ \psi_2^{-1} : S^6 \setminus \{S, N\} \times SU(3) \to S^6 \setminus \{S, N\} \times SU(3) ,$$

$$(\xi, \phi) \mapsto (\xi, \theta_\xi \circ \tilde{\theta}_\xi^{-1}(\phi)) ,$$

azaz egy tetszőleges $\xi \in S^6 \setminus \{S, N\}$ esetén az egyik odatolt bázist felírjuk a másik odatolt bázisban.

5 Így a két trivializáció közötti ragasztófüggvény:

$$S^6 \setminus \{S, N\} \to SU(3), \quad \xi \mapsto \theta_\xi \circ \tilde{\theta}_\xi^{-1} ,$$

ami minden ξ-re egy $SU(3)$-beli mátrixszal való szorzás (báziscsere).

G_2 mint $SU(3)$-nyaláb

6 Elég az egyenlítőn nézni (ez homotóp ekivivalens a $S^6 \setminus \{S, N\}$ övvel, és itt lehet szépen kiszámolni). Az eredmény:

$$\theta\colon S^5 \to SU(3), \quad \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u^2 & vu + \overline{w} & wu - \overline{v} \\ uv - \overline{w} & v^2 & wv + \overline{u} \\ uw + \overline{v} & vw - \overline{u} & w^2 \end{pmatrix} .$$

Tétel

A $\theta : S^5 \to SU(3)$ leképezés homotópiaosztálya a $\pi_5(SU(3)) = \mathbb{Z}$ generátora.

Ez az generátor már ismert volt (90-es évek vége, 2000-es évek eleje), de a módszer a kiszámolására új.

Egy érdekesség

A G_2 csoportnak létezik egy másik konstrukciója is. Ha $f : V^* \to V^*$ egy V vektortér duálisának lin. leképezése, vehetjük a $\Lambda(f) : \Lambda(V^*) \to \Lambda(V^*)$ leképezést a külső algebrán. Legyen $V = \mathbb{R}^7$, a bázisa $(e_1, \ldots, e_7)$.
Egy 3-forma V-n:

$$\varphi = e^{123} + e^{145} - e^{167} + e^{246} + e^{257} + e^{347} - e^{356} \ .$$

Egy $f : V^* \to V^*$ lin. leképezés *megtartja* φ-t,ha

$$\Lambda(f)(\varphi) = \varphi \ .$$

Tétel

$GL(V^*) = GL(7, \mathbb{R})$ azon részcsoportja, ami megtartja φ-t izomorf a G_2-vel.

Ötlet: $(i, \ldots, h) = (e_1, \ldots, e_7)$-el szorzás indukálódik, pl. $e_1 e_2 = e_3$.

Holonómiacsoport

Legyen (M, g) egy öf. Riemann sokaság, ∇ a Levi-Civita konnexió.
Párhuzamos eltolás x-ből y-ba $\rightsquigarrow$ egy $T_x M \to T_y M$ izometria.

Definíció

Holonómia csoport $Hol(g)$: tetszőleges x-beli zárt hurkok által generált izometriái $T_x M$-nek.

Megjegyzés: ez független x-től.

Osztályozás

Tétel (Berger, 1955)

Ha M egy egyszeresen-összefüggő, n dimenziós Riemann sokaság g metrikával ami irreducibilis (lokálisan nem szorzattér alakú) és nem szimemtrikus (lokálisan sem), akkor $Hol(g)$ a következők valamelyike

- $SO(n)$
- $U(m)$ *és* $n = 2m$ *(Kähler)*
- $SU(m)$ *és* $n = 2m$ *(Calabi-Yau)*
- $Sp(m)$ *és* $n = 4m$ *(hyperKähler)*
- $Sp(m)Sp(1)$ *és* $n = 4m$ *(quaternionic Kähler)*
- G_2 *és* $n = 7$
- $Spin(7)$ *és* $n = 8$.

G_2 sokaságok

Legyen M irányított 7-sokaság. Egy G_2 struktúra M-en definiál egy ω 3-formát és egy g metrikát, hogy minden $m \in M$-re

- $g|T_m M \cong$ standard metrika $\mathbb{R}^7$-en
- $\omega|T_m M \cong \varphi = e^{123} + e^{145} - e^{167} + e^{246} + e^{257} + e^{347} - e^{356}$

Tétel

Ez visszafelé is igaz, azaz (g, ω) mint fent $\rightsquigarrow$ egy G_2 struktúra M-en.

Definíció

(M, g, ω) egy G_2-sokaság, ha a fentiek teljesülnek és ω torziómentes ($\nabla\omega = 0$).

Tétel

Ha (M, g, ω) egy G_2-sokaság, akkor $Hol(g) = G_2 \Leftrightarrow \pi_1(M)$ véges.

G_2 sokaságok konstrukciója

- Bonan (1966): 7-sokaság G_2 holonómiával
- Bryant, Salamon (1989): teljes, de nemkompakt 7-sokaság G_2 holonómiával
- Joyce (1994): kompakt 7-sokaság G_2 holonómiával

Fizikában pl. M elmélet egy G_2 sokaságok kompaktifikálva:

$$11 - 7 = 4 \text{ dimenziós elmélet}$$

Irodalom

1. Kantor, Szolodovnyikov: Hiperkomplex számok, Gondolat
2. Postnikov: Lectures in Geometry, Semester V, Mir, Moscow, 1988
3. Baez: The Octonions, AMS, 2002
4. Joyce: Compact Manifolds with Special Holonomy, Oxford University Press, Oxford, 2000

Köszönöm a figyelmet!

Kérdések?