

A Lorenz-attraktor

Gyenge Ádám

2010. május 18.

1. A Lorenz-rendszer

1963-ban Edward Lorenz egy nagyon érdekes differenciálegyenlet-rendszert írt fel, mely számos különleges tulajdonsággal rendelkezik [3]. A modell egy folyadékban lebegő részecskék helyzetét ragadja meg. A részecskét a föld alulról melegíti, így az felfelé száll majd fent lehül és leereszkedik. A modell egy kétdimenziós folyadék/gáz cella fizikai folyamatainak leegyszerűsítése, amiben csak 3 változó mennyiség van. Ezek közül az egyik a hőáramlás általi körülfordulás intenzitása (x), a másik kettő pedig a vízszintes és függőleges hőmérséklet változás (y és z). A modellt tehát egy háromdimenziós, nem-lineáris, determinisztikus, közönséges differenciálegyenlet-rendszer adja meg:

$$\begin{aligned}x' &= \sigma(y - x) \\y' &= rx - y - xz \\z' &= xy - bz .\end{aligned}$$

Az egyenletrendszer három paramétere a σ Prandtl szám, az r Rayleigh szám és a b paraméter, ami a rendszer méretét szabályozza. Feltevés, hogy mindhárom pozitív valós szám és hogy $\sigma > b + 1$. Az eredeti modellben ezek a paraméterek $\sigma = 10$, $b = 8/3$ és $r = 28$ voltak. Ebben az esetben a rendszer megoldásgörbéi egy nagyon érdekes alakzatot adnak, amit az 1. ábra szemléltet.

2. Elemi vizsgálatok

Egyszerű algebrai módszerekkel meghatározható, hogy a rendszer egyensúlyi pontjai az origó, továbbá a

$$Q_{\pm} = (\pm\sqrt{b(r-1)}, \pm\sqrt{b(r-1)}, r-1)$$

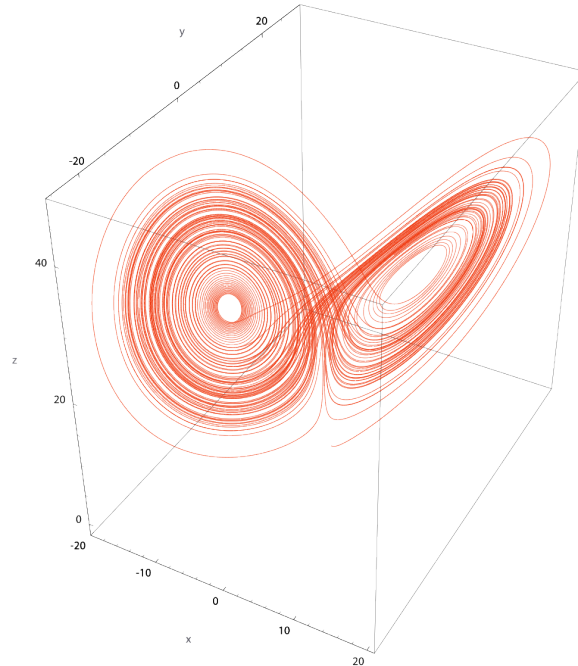
pontok. A linearizált rendszer mátrixa

$$\begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r-z & -1 & -x \\ y & x & -b \end{pmatrix} .$$

Az origóban a sajátértékek $-b$ és

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \left(-(\sigma + 1) \pm \sqrt{(\sigma + 1)^2 - 4\sigma(1 - r)} \right) .$$

Így a $0 \geq r < 1$ esetben az origó egy stabil fókusz. Egy megfelelő Ljapunov függvény ($L(x, y, z) = x^2 + \sigma y^2 + \sigma z^2$) segítségével igazolható a következő állítás.



1. ábra. A Lorenz attraktor

2.1. Állítás. *Ha $r < 1$, akkor a rendszer összes megoldása az origóhoz tart.*

Amikor $r > 1$, akkor két dolog történik. Egyszerűsít az origó-beli λ_+ sajátérték pozitívvá válik és így az origó nyeregponttá válik. Másrészt létrejönnek a Q_{\pm} egyensúlyi pontok.

2.2. Állítás. *A Q_{\pm} egyensúlyi pontok stabil fókuszok, ha $1 < r < r^* = \sigma \cdot \frac{\sigma+b+3}{\sigma-b-1}$.*

3. A Lorenz-attraktor

Mint említettük, Lorenz eredeti vizsgálataiban a paraméterek $\sigma = 10$, $b = 8/3$ és $r = 28$ voltak. Ezután mi is ezt vizsgáljuk. Ebben az esetben a rendszernek egy úgynevezett „attraktora” van, azaz létezik egy olyan invariáns halmaz, ami magához vonzza a környező megoldásokat.

3.1. Definíció. *Legyen $X' = F(X)$ egy differenciálegyenlet-rendszer és φ_t a neki megfelelő folyam (flow). A Λ halmaz egy attraktor, ha*

1. Λ kompakt és invariáns,
2. létezik Λ -nak egy olyan U nyílt környezete, hogy minden $X \in U$ pontra $\varphi_t(X) \in U$ minden $t \geq 0$ esetén és $\bigcap_{t \geq 0} \varphi(U) = \Lambda$,
3. (tranzitivitás) minden $Y_1, Y_2 \in \Lambda$ és $Y_1 \in U_1, Y_2 \in U_2$ nyílt környezetek esetén létezik egy olyan megoldásgörbe, ami U_1 -ből indul és később áthalad U_2 -n.

Az eredeti paraméterezés esetén tehát az egyensúlyi pontok: $(0, 0, 0)$ és $Q_{\pm} = (\pm 6\sqrt{2}, \pm 6\sqrt{2}, 27)$. Az origóban a sajátértékek $\lambda_1 = -8/3$ és $\lambda_{\pm} = -\frac{11}{2} \pm \frac{\sqrt{1201}}{2}$. Azaz a sajátértékek sorrendje $\lambda_- < \lambda_1 < 0 < \lambda_+$, így tehát az origóban van egy stabil 2 dimenziós altér (xz sík) és egy instabil altér (y tengely). Q_{\pm} -ben egy egyszeres, valós, negatív és egy komplex, pozitív valós részű, konjugált pár a sajátértékek. Amint az a 1. ábrán látható egy általános pálya egy ideig például a Q_+ egyensúlyi pont körül kering, majd egy idő után áttér a Q_- körüli keringésre, ahonnan megint visszatér a Q_+ -hoz, stb.

4. Egy heurisztikus modell

Amint az az ábrán is látszik, a fent említett pályák mindig elmetszik a $z = 27$ paraméterű síkot. Ezért a folyamat jobb megértése érdekében érdemes lehet erre a síkra nézve a Poincaré leképezést vizsgálni. Ennek az explicit kiszámítása azonban nagyon nehéz. Így egy egyszerűsített modellt tekintünk, ami sok tekintetben hasonlóan viselkedik a Lorenz-rendszerhez. 1979-ben Guckenheimer és Williams a következő, geometriai ihletésű egyszerűsített modell javasolta [1]. A modellt nem egy vektormezővel adjuk meg, hanem bizonyos kvalitatív tulajdonságokkal. Megmutatható, hogy ilyen rendszer létezik (matematikai értelemben) és az megfelel a Lorenz-rendszer bizonyos paraméterezésének.

Mivel a Lorenz-rendszer az $(x, y, z) \mapsto (-x, -y, z)$ tükrözésre szimmetrikus, így az új rendszer is legyen ilyen. Az origó egy egyensúlyi pont legyen és az $|x|, |y|, |z| < 5$ kockában a rendszer lineáris a $-1, 2$ és -3 sajátértékekkel. Azaz a kockában a rendszert az

$$\begin{aligned}x' &= -3x \\y' &= 2y \\z' &= -z\end{aligned}$$

egyenletek adják meg. Helyezzünk el két további egyensúlyi pontot a $z = 27$ síkban, a $Q_- = (-10, -20, -27)$ és a $Q_+ = (10, 20, 27)$ úgy hogy az $y = \pm 20, z = 27$ egyenesek az említett egyensúlyi pontok stabil alterei legyenek, és a másik két sajátvektor ebben a pontban komplex pozitív valós részrel.

Jelöljük Σ -val az $|x|, |y| \leq 20, z = 27$ téglalapot. A modell legyen olyan, hogy az ezen téglalap belsejében a vektormező lefelé mutat, így a megoldások spirális alakban távolodnak Q_{\pm} -től, akár csak a Lorenz modellben. Jelölje ζ^{\pm} az origóból kiinduló két instabil megoldást, amelyek megkerüli az említett téglalapot majd felülről átmetszik azt a $\rho^{\pm} = (\pm x^*, \mp y^*)$ pontokban.

Ezután tekintsünk egy $y = v$ koordinátájú egyenes vonalat Σ -ban. Ha $v = 0$, akkor az innen induló megoldások az origóba tartanak, így sose térnek vissza Σ -ba. Feltesszük viszont, hogy minden más, Σ -ból induló megoldás visszatér oda, és ennek mikéntjét a következő tulajdonságok írják le.

1. Legyen $\Sigma_+ = \Sigma \cap \{y > 0\}$ és $\Sigma_- = \Sigma \cap \{y < 0\}$. Feltesszük, hogy minden Σ_{\pm} -beli ponton áthaladó megoldás visszatér Σ -ba egy későbbi időpontban. Ezért értelmes a $\Phi : \Sigma_+ \cup \Sigma_- \rightarrow \Sigma$ Poincaré leképezés. Feltesszük továbbá, hogy $\Phi(\Sigma_+)$ egy olyan egyenlő szárú háromszög, amelynek a talpával szemközi csúcsa ρ^+ , a talppontjának középpontja pedig Q_+ (ugyanígy Σ_- -ra).
2. Minden $v \neq 0$ esetén feltesszük, hogy Φ az $y = v$ egyenest az $y = g(v)$ egyenesre viszi ahol g egy megfelelő függvény, továbbá Φ összehúzza ezt az egyenest az x tengely mentén.

3. Feltesszük, hogy Φ a Σ_+ és Σ_- tartományokat az y tengely mentén legalább $\sqrt{2}$ -szeresre nyújtja, azaz $g'(v) > \sqrt{2}$.

4. A $D\Phi$ leképezés a Σ_{\pm} -t érintő azon vektorokat, melyeknek a síkban vett meredeksége ± 1 , olyan vektorba viszi, amelyek meredekségének abszolútértéke 1-nél nagyobb.

Analitikusan ezekből a tulajdonságokból következik, hogy $\Phi(x, y) = (f(x, y), g(y))$ alakú.

Legyen $R \subset \Sigma$ az a téglalap, amelyre $|y| \leq y^*$, azaz amit a ρ^{\pm} -ra fektetett, x tengellyel párhuzamos egyenesek határolnak. Megmutatható, hogy bármilyen, Σ_{\pm} -ből induló megoldás előbb-utóbb metszi R -t, így elég Φ tulajdonságait csak ott vizsgálni, és erre igaz hogy $\Phi(R) \subset R$. Legyen

$$A = \bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{\Phi^n(R)},$$

és

$$\mathcal{A} = \left(\bigcup_{t \in \mathbb{R}} \phi_t(A) \right) \cup \{(0, 0, 0)\}.$$

Ekkor belátható, hogy A egy attraktora a Φ leképezésnek és így \mathcal{A} egy attraktor a modell Lorenz rendszerben (biz. ld. [2]).

5. Kaotikus tulajdonságok

Mivel két különböző, de azonos y koordinátájú pont képe is azonos y koordinátájú, csak a távolságuk csökken, ezért sok vizsgálathoz tulajdonképpen elég csak magával az y koordinátával foglalkozni, és annal változásával a g hatására. Ekkor a Poincaré leképezést egyértelműen meghatározza az $I \setminus \{0\}$ intervallumon értelmezett g függvény, ahol $I = [-y^*, y^*]$.

A fent említett tulajdonságokból következik, hogy $g(-y) = -g(y)$ így g páratlan függvény, 0-ban balról y^* -hoz, jobbról $-y^*$ -hoz tart és $g'(y) > \sqrt{2}$. Látható, hogy a $[g(-y^*), g(y^*)]$ intervallumbeli pontoknak két ősképe van, az $(-y^*, g(-y^*))$, $(g(y^*), y^*)$ belieknek egy, míg $\pm y^*$ -nak nincs ősképe.

Legyen $y_0 \in I$ és vizsgáljuk az $A \cap \{y = y_0\}$ halmazt. Egyszerű érveléssel belátható a következő állítás.

5.1. Állítás. *Legyen $0 < v < y^*$. Minden $\epsilon > 0$ esetén létezik $u_0, v_0 \in I$, hogy $|u_0 - y_0| < \epsilon$ és $|v_0 - y_0| < \epsilon$ úgy, hogy $|g^n(u_0) - g^n(v_0)| \geq 2v$.*

Bizonyítás. Legyen J egy y_0 középpontú, 2ϵ átmérőjű intervallum. A g függvény minden iterációja legalább $\sqrt{2}$ -szeresére nyújtja a J intervallumot, így létezik egy olyan n , hogy $0 \in g^n(J)$. Ekkor $g^{n+1}(J)$ tartalmaz $\pm y^*$ -hoz tetszőlegesen közeli pontokat, és így léteznek pontok $g^{n+1}(J)$ -ben, amelyek távolsága legalább $2v$.

Így tehát a g függvény orbitja nagyon érzékenyen függ a kezdeti értéktől, ami a kaotikus rendszerek egyik jellemzője. Ebből következően hasonló tulajdonság érvényes Φ -re és A -ra is.

Egy y_0 pontot *periodikusnak* nevezünk, ha létezik olyan $n > 0$, hogy $g^n(y_0) = y_0$.

5.2. Állítás. *A g függvény periodikus pontjai sűrűek I -ben.*

Bizonyítás. (Ötlet) Megmutatható, hogy bármilyen $J \subset I \setminus \{0\}$ részintervallum esetén létezik olyan $n > 0$ és $J' \in J$, hogy g^n J' -t egy az egyben $(-y^*, 0]$ -ra vagy $[0, y^*)$ -ra képezik. Emiatt vagy $J' \subset g^n(J)'$ vagy $J' \subset g^{n+1}(J')$. Így a g^n vagy g^{n+1} grafikonja metszi az $y = x$ egyenest és így létezik egy periodikus pontja g -nek minden $J \subset I \setminus \{0\}$ intervallumban.

Ez alapján belátható, hogy ugyanez teljesül Φ -re A -n.

Egy harmadik lényeges tulajdonság, hogy a g függvény tranzitív I -n, és hogy ugyanez igaz Φ -re A -n.

Az eddigieket összefoglalva kapjuk az alábbi tételt.

5.3. Tétel (A Lorenz-modell dinamikája). *A Φ Poincaré leképezés a Lorenz-modell A attraktorára teljesíti a következő tulajdonságokat:*

1. Φ a kezdeti értéktől érzékenyen függ;
2. Φ periodikus pontjai sűrűek A -ban;
3. Φ tranzitív A -n.

Hivatkozások

- [1] J. Guckenheimer and R.F. Williams. Structural stability of Lorenz attractors. *Publications Mathématiques de l'IHÉS*, 50(1):59–72, 1979.
- [2] M.W. Hirsch, S. Smale, and R.L. Devaney. *Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos*. Academic Pr, 2004.
- [3] E.N. Lorenz. Deterministic Nonperiodic Flow. *Journal of Atmospheric Sciences*, 20:130–148, 1963.